Lecture 08 方程式と関数のグラフの対応

例題 1. 2次方程式 $x^2-ax+b=0$ が -1 以上かつ1以下の範囲に実数解を少なくとも一つ持つような点 $(a,\ b)$ の存在範囲を ab 平面に図示せよ. [北海道大]

2. x の方程式 $ax^2+2bx-a+1=0$ が $-1\leqq x\leqq 1$ を満たす解を持つような実数 a，b の範囲を ab 平面に図示せよ. [埼玉大]

類題 1. 実数 a，b に対し，x についての2次方程式 $x^2-2ax+b=0$ は $0\leqq x\leqq 1$ の範囲に少なくとも一つの実数解を持つとする．このとき，a，b が満たす条件を求め，点 $(a,\ b)$ の存在範囲を図示せよ. [大阪市立大]

2. 方程式 $(a+1)x^2-2(a-3)x+2a=0$ が与えられている．次のそれぞれの場合について，a のとるべき値の範囲を求めよ.
(1) 実数解を持つとき
(2) 正の実数解のみを持つとき
(3) 少なくとも一つの正の解を持つとき
(4) 解の少なくとも一つは1より大であるとき [久留米大]

解答. 1. ($0\leqq a\leqq 1$ かつ $b\leqq a^2$ かつ $b\geqq 0$ かつ $b\geqq 2a-1$) または ($b(1-2a+b)\leqq 0$) 2. (1) $-9\leqq a\leqq 1$ (2) $-9\leqq a\leqq -1$ (3) $-9\leqq a<0$ (4) $-9\leqq a<-1$

問題 1. 方程式 $x^2+ax+b=0$ が相異なる二つの実数解を持ち，それらがともに $-1<x<2$ の範囲にあるような点 $(a,\ b)$ の存在範囲を ab 平面に図示せよ． ［龍谷大］

2. a，b は実数で，$a\geqq 0$ とする．方程式 $x^3-3a^2x+b=0$ が $0\leqq x\leqq 1$ となる解を少なくとも一つ持つような点 $(a,\ b)$ の存在する範囲を求め，それを図示せよ． ［三重大］

3. x についての 2 次方程式 $x^2+2qx+4-p^2=0$ が実数解 α，β をもち，$|\alpha|\leqq 2$ かつ $|\beta|\leqq 2$ を満たすとき，点 $(p,\ q)$ の存在する範囲を図示せよ．ただし，p，q は実数とする． ［広島文教女子大］

4. 3 次関数 $f(x)=x^3+ax^2+bx$ は極大値と極小値を持ち，それらを区間 $-1\leqq x\leqq 1$ の範囲内でとるという．この条件を満たすような実数の組 $(a,\ b)$ の範囲を ab 平面上に図示せよ． ［東京大］

5. a が 1 でない任意の定数のとき，2 次方程式 $3(a-1)x^2+6x-a-2=0$ は，0 と 1 の間に少なくとも一つの解を持つことを示せ． ［お茶の水女子大］

6*. a，b，c，d を正の数とする．不等式

$$s(1-a)-tb>0,\quad -sc+t(1-d)>0$$

を同時に満たす正の数 s，t があるとき，2 次方程式 $x^2-(a+d)x+(ad-bc)=0$ は $-1<x<1$ の範囲に相異なる 2 つの実数解を持つことを示せ． ［東京大］

Lecture 09　「ならば」，instantiation，不等式と最大・最小

例題 1. 次の各問に答えよ．

(1) 方程式 $x^5-2x+1=0$ は実数解を持つことを示せ．

(2) A 君はお父さんと「今度の試験で満点を取れなかったら，家の床の拭き掃除をする」と約束した．がんばった A 君は満点を取った．ところがお父さんは「家事の手伝いをするのは家族の義務だ」と言って，A 君に床の拭き掃除をやらせた．論理的に考えて，このお父さんは約束を破るひどい大人だろうか？

(3) 関数 $f(x)$ には最大値 M が存在するという．すなわち，任意の実数 x に対して常に $f(x)\leqq M$ であり，また，ある x_0 に対して $f(x_0)=M$ となるのだ．さて，この $f(x)$ に対して，次のような情報が得られた：

$$f(1)=2,\quad f(2)=3,\quad f(3)=-1$$

この情報から得られる M についての最も詳しい条件は何か．

2. $x\geqq 0$，$y\geqq 0$，$z\geqq 0$ ならば，不等式 $(x+y+z)(xy+yz+zx)\geqq axyz$ が常に成り立つような定数 a の最大値を求めよ．　［横浜国大］

類題 1. 不等式 $x^2+y^2+z^2\geqq a(xy+yz+zx)$ が常に成り立つような定数 a の最大値を求めよ．

2. $x\geqq 0$，$y\geqq 0$ とし，不等式 $c(x+y)\geqq 2\sqrt{xy}\cdots(*)$ を考える．ただし，c は正の定数である．

(1) $c\geqq 1$ のとき，$(*)$ は常に成り立つことを示せ．

(2) 常に $(*)$ が成り立てば，$c\geqq 1$ であることを示せ．

(3) $\sqrt{x}+\sqrt{y}\leqq k\sqrt{x+y}$ が常に成り立つような正の定数 k のうちで，最小のものを求めよ．

［東北学院大］

解答． 1. $a=1$　2. $k=\sqrt{2}$

問題 1. 不等式 $ax^2+y^2+az^2-xy-yz-zx \geqq 0$ が任意の実数 x, y, z に対して常に成り立つような定数 a の値の範囲を求めよ. ［滋賀県立大］

2. $(x+y)^3 \leqq a(x^3+y^3)$ が正の x, y に対して常に成立するような a の値の最小値を求めよ. ［創価大］

3. $x \geqq y \geqq 0$ を満たすすべての x, y に対して $ax+by \geqq 0$ が成り立つために定数 a, b が満たす条件を求めよ. ［甲南大］

4*. x, y, z, w を正の実数とする. 任意の正の整数 m, n に対して

$$(x^{\frac{1}{m}}+y^{\frac{1}{m}})^n+(z^{\frac{1}{m}}+w^{\frac{1}{m}})^n=\{(x^{\frac{n}{m}}+z^{\frac{n}{m}})^{\frac{1}{n}}+(y^{\frac{n}{m}}+w^{\frac{n}{m}})^{\frac{1}{n}}\}^n$$

が成り立つための必要十分条件を求めよ. ［東京工大］

5. 関数 $y=f(x)$ に対して, 常に

$$2\{f(u)+f(v)\}=f(u+v)+f(u-v)$$

が成り立つ. $f(1)=3$ であるとき $f(10)$ を求めよ. ［立教大］

6. 関数 $f(x)$ はすべての実数 x, y に対して, 次の関係式を満たすとする.

$$f(x+y)=f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)f(y)+f\left(\frac{\pi}{2}-y\right)f(x)$$

このとき, 次の等式を示せ.

(1) $f(0)=f(\pi)$

(2) $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\{f(x)\}^2+\left\{f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right\}^2$

(3) $f(0)=0$ のとき $f(x+2\pi)=f(x)$

［お茶の水女子大］

解答.　1. $a \geqq 1$　2. 4　3. $a \geqq 0$ かつ $a+b \geqq 0$　4. $xw=zy$　5. 300

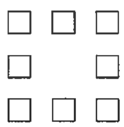
Lecture 10　同じものを含む順列と組合せ

例題 1. a，a，b，b，c，c，c，c の8個の文字全部を机の上で円形に並べる方法は何通りあるか.　［大阪女子大］

2. A，A，B，B，C，C の6文字を一列に並べるとき，同じ文字が隣り合わない順列は全部で何個あるか.　［慈恵医大］

3. 次の各問に答えよ.
(1) 整数 x，y，z が条件 $x \geqq 0$，$y \geqq 2$，$z \geqq 4$ を満たすとき，$x+y+z=10$ を満たす解 $(x,\ y,\ z)$ の個数を求めよ.
(2) 1，2，3，4，5 の5個の数字を用いて，4桁の整数を作る．ただし，同じ数字を繰り返し用いてもよいとする．一の位，十の位，百の位，千の位の数字をそれぞれ a_1，a_2，a_3，a_4 とするとき，$a_1 \leqq a_2 \leqq a_3 \leqq a_4$ であるような整数は何個あるか.
［(1) 創価大 (2) 京都産業大］

類題 1. 8枚のタイルが図のように並んでいる．8枚のタイルのうち3枚を赤色に，残りを白色に塗ることにする．このとき，次の各問に答えよ.
(1) 色の配置が左右対称になる塗り方は何通りあるか.
(2) 90° の倍数の角度の回転で重なり合う色の配置を同じと考えると，色の配置は全部で何通りあるか.



2. 次のそれぞれの条件を満たす整数 $(x,\ y,\ z)$ の組の個数を求めよ.
(1) $x+y+z=11$，$x \geqq 1$，$y \geqq 2$，$z \geqq 3$
(2) $x+y+z \leqq 11$，$x \geqq 1$，$y \geqq 1$，$z \geqq 1$

3. YAMANAMI の8つの文字を横一列に並べるとき，その並べ方について，次の各問に答えよ.
(1) 全部で何通りの並べ方があるか.
(2) M が2つ続く並べ方は何通りあるか.
(3) A が3つ続く並べ方は何通りあるか.
(4) A が2つ以上続く並べ方は何通りあるか.
(5) A が2つ以上続き，かつ，M も2つ続く並べ方は何通りあるか.
［山形大］

解答.　1. (1)6 通り (2)14 通り　2. (1)21 個 (2)165 個　3. (1)3360 通り (2)840 通り (3)360 通り (4)2160 通り (5)600 通り

問題 1. YOKOHAMA という語の 8 文字すべてを並べてできる順列について，

(1) 順列の総数を求めよ．

(2) AA という並びと OO という並びをともに含む順列は全部でいくつあるか．

(3) AO という並びまたは OA という並びの少なくとも一方を含む順列は全部でいくつあるか．［横浜国大］

2. 0，1，2，3 の 4 種類の数字を使って，4 桁の整数を作る．ただし，同じ数字を何回使用してもよいとする．このとき，

(1) 4 桁の整数は全部で 4 桁の整数は全部で何個できるか．

(2) 同じ数字が連続して並ばないような 4 桁の整数は全部で何個できるか．

［北海道工大］

3. 重複を許した 5 つの負でない整数 a，b，c，d，e がある．このとき，$a+b+c+d+e=7$ となるような (a, b, c, d, e) の組合せは何通りあるか．［山梨学院大］

4. 次の各問に答えよ．

(1) 黒と白の同色どうしは区別のつかない玉が十分数多くある．これらの玉 6 個をつないで輪を作るとき，異なる輪は何種類できるか．

(2) 赤，白，緑の同色どうしは区別のつかない玉が十分数多くある．これらの玉 4 個をつないで輪を作るとき，異なる輪は何種類できるか．［大妻女子大］

5. 1，1，1，2，2，3，3 の 7 個の数字を用いて得られる 7 桁の整数の個数と，同じ 7 個の数字から 6 個の数字を選んでできる 6 桁の整数の個数が等しいことを示せ．

6. A，B，C の 3 つの箱に，白球 5 個，黒球 7 個を入れる方法は何通りあるか．ただし，空箱はないものとする．

解答. 1. (1) 10080 通り　(2) 720 通り　(3) 7440 通り　2. (1) 192 個　(2) 81 個　3. 330 通り　4. (1) 13 種類　(2) 21 種類
5. ともに 210 個．計算しないで両者が等しいことを示すこともできる．　6. 615 通り

Lecture 11　確率漸化式

例題 1. 1つのサイコロを n 回 $(n \geqq 1)$ 投げたとき，1の目の出る回数が偶数である確率を p_n，奇数回である確率を q_n とする．ただし，0回は偶数回と考える．

(1) p_{n+1}，q_{n+1} を p_n，q_n で表せ．

(2) $p_n - q_n$ を n で表せ．

(3) p_n，q_n を n で表せ．　[神奈川大]

2. 正四面体ABCDの4つの頂点を移動する点Pがある．点Pがいずれの頂点にあるときも1ステップの後に同じ頂点にとどまる確率は $\dfrac{2}{5}$ であり，他の頂点に移動する確率はいずれも $\dfrac{1}{5}$ である．頂点Aから出発した点Pが n ステップの後に頂点Aにある確率を a_n，頂点Bにある確率を b_n とする．a_n，b_n を求めよ．ただし，$a_0=1$，$b_0=0$ とする．　[富山大]

類題 1. 四面体OABCの頂点を移動する点Pがある．点Pは1つの頂点に達してから1秒後に他の3つの頂点のいずれかに各々確率 $\dfrac{1}{3}$ で移動する．頂点Oにいた点Pがそれから n 秒後に頂点Aにいる確率を p_n とする．

(1) p_{n+1} を p_n を用いて表せ．

(2) p_n を求めよ．　[工学院大]

2. 一つのサイコロを繰り返し投げ，k 回目に出た目を a_k とする．また，n 回目までのそれらの積 $a_1 a_2 \cdots a_n$ を b_n とおく．

(1) b_n が奇数となる確率を n を用いて表せ．

(2) b_n の一の位が5となる確率を n を用いて表せ．

(3) b_n の一の位が1または9となる確率を p_n とおき，b_n の一の位が3または7となる確率を q_n とおく．p_n，q_n に関する漸化式を立て，p_n，q_n をそれぞれ n を用いて表せ．　[大阪教育大]

解答.　1. $p_n = \dfrac{1}{12}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1} + \dfrac{1}{4}$　2. (1) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$　(2) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$　(3) $p_{n+1} = \dfrac{1}{6}p_n + \dfrac{1}{6}q_n$，$q_{n+1} = \dfrac{1}{6}p_n + \dfrac{1}{6}q_n$，$p_n = q_n = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

問題 1.　次の関係で定まる 2 つの数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ がある．$a_1=2$，$b_1=1$，$a_{n+1}=a_n+b_n$，$b_{n+1}=9a_n+b_n$　このとき，数列 $\{a_n+kb_n\}$ が等比数列となるように定数 k を定め，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．　［広島国際大］

2. 数直線上を原点から出発し，次の規則で移動する点 P がある．

　1 個のサイコロを投げて，出た目が 5 以上の場合は，正の向きに 2 進み，出た目が 4 以下の場合は，正の向きに 1 進む．

サイコロを n 回投げたとき，P の座標が偶数になる確率を a_n とする．a_n を求めよ．　［福井大］

3. 直線上に異なる 2 点 A，B があって，P は A と B の 2 点を行ったり来たりする点である．サイコロを投げて 1 の目が出たとき，P は他の点に移動し，1 以外の目が出たときはその場所にとどまるとする．初めに P は A にいるとして，サイコロを n 回 $(n \geqq 1)$ 投げたとき P が A にいる確率を p_n で表す．ただし，サイコロの目の出る確率はそれぞれ $\frac{1}{6}$ である．p_n を求めよ．　［中央大］

4. 平面上に正三角形 ABC と，その頂点の上を動く点 P がある．点 P は初め頂点 A にある．サイコロを 1 回振るごとに，奇数の目が出れば反時計回りに 1 つ隣の頂点に，偶数の目が出れば時計回りに一つ隣の頂点に，点 P をそれぞれ移動させる．サイコロを n 回振ったとき，点 P が各頂点 A，B，C にある確率をそれぞれ a_n，b_n，c_n とする．

(1) a_n，b_n，c_n をそれぞれ求めよ．

(2) 次にルールを変えて，サイコロを 1 回振るごとに，1 または 4 の目が出れば点 P を動かさず，2 また 5 の目が出れば反時計回りに一つ隣に，3 または 6 の目が出れば時計回りに一つ隣に，それぞれ移動させる．このルールの下でサイコロを n 回振ったとき，点 P が各頂点 A，B，C の上にある確率 p_n，q_n，r_n を求めよ．　［鳥取大］

5. 1 個のサイコロを投げ，4 以下の目が出ればボールの所有者が変わり，5 以上の目が出れば変わらない，という規則に従って，最初 A が持っている一つのボールを，A，B の 2 人の間で受け渡しあうものとする．n 回サイコロを投げた後，A，B がボールを持っている確率をそれぞれ a_n，b_n としたとき，a_n と b_n を n の式で表せ．　［青山学院大］

6. 四面体 $A_1A_2A_3A_4$ の頂点から頂点に動く点 Q がある．一つのサイコロを投げ，出た目に応じて Q は次の規則に従って動く：

　サイコロを投げる前，Q は A_k にあるとする．サイコロを投げたとき，出た目 l が k, 5, 6 のいずれにも等しくなければ Q は A_l に動き，l が k, 5, 6 のいずれかに等しければ Q は A_k にとどまる．

最初 Q は A_1 にあるとする．サイコロを n 回投げたとき，Q が A_1 にある確率を p_n とする．p_n を求めよ．　［山口大］

解答.　1. $a_n=\frac{7\cdot 4^{n-1}+5\cdot(-2)^{n-1}}{6}$　2. $a_n=\frac{1}{2}\left\{1+\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}$　3. $p_n=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1\right\}$　4. (1) $a_n=\frac{1}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$, $b_n=c_n=\frac{1}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$　(2) $p_n=q_n=r_n=\frac{1}{3}$　5. $a_n=\frac{1}{2}\left\{1+\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}$, $b_n=\frac{1}{2}\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}$　6. $p_n=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3^{n-1}}+1\right)$