高等学校対応数学 確認テスト	数学Ⅰ・A 上級 ２次関数 第１講①	氏名		得点
		学習日 　月　日	所用時間 　分	/100

[２次関数のグラフと平行移動]（1 50 点，2 50 点）

1　2 次関数 $y=x^2-3x+4$ のグラフを平行移動したもので，点$(2,\ 4)$を通り，頂点が直線$y=2x+1$上にあるグラフの方程式を求めよ.

2　2 つの 2 次関数 $y=x^2+ax-2$ と $y=-x^2-4x+b$ のグラフの頂点が一致するとき $a=$ $\boxed{}$，$b=$ $\boxed{}$ であり，頂点の座標は($\boxed{}$，$\boxed{}$)である.

高等学校対応数学 確認テスト	数学Ⅰ・A 上級 ２次関数 第１講②	氏名		得点
		学習日 月　日	所用時間 分	／100

［２次関数のグラフと対称移動・２次関数の決定］（$\boxed{1}$ 50 点，$\boxed{2}$ 50 点）

1　2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフは放物線である．その軸が $x=2$ で，y 軸と点$(0,\ 3)$で交わり，かつ x 軸に接するのは $a=\boxed{}$，$b=\boxed{}$，$c=\boxed{}$ のときである．

2　放物線 $y=-2x^2-ax$ と同じ頂点をもち，点$(0,\ 9)$を通る放物線の式が $y=bx^2+6x+c$ であるという．a，b，c の値を求めよ．

高等学校対応数学 確認テスト	数学Ⅰ・A 上級 ２次関数 第２講①	氏名		得点
		学習日 月　日	所用時間 分	/100

[２次関数の最大・最小（１）]（1 50 点，2 50 点）

1 $x \geqq 0$ のとき，実数 a を含む x の関数

$$f(x)=x^2-2ax-4x+2a^2+a+3$$

の最小値を a を用いて表せ．

2 t を定数とする．２次関数 $y=x^2+4x-3\ (t \leqq x \leqq t+1)$ の値域を定数 t の値により場合分けして求めよ．

高等学校対応数学 確認テスト	数学Ⅰ・A 上級 ２次関数 第２講②	氏名		得点
		学習日 月　日	所用時間 分	/100

［２次関数の最大・最小（２）］（$\boxed{1}$(a)20 点(b)30 点，$\boxed{2}$ 50 点）

$\boxed{1}$ 頂点の内角がすべて同じである六角形 ABCDEF がある．以下の条件を満たすとき，六角形 ABCDEF の面積の最大値を求めよ．

(a)　周の長さが 60cm である．

(b)　四角形 BCEF は長方形である．

$\boxed{2}$ 長さ 30cm の針金がある．これを 2 つに切り，それぞれを折り曲げて正三角形と正六角形を作る．これら 2 つの図形の面積の和 S を最小にするには針金をどのように切ればよいか．また，S の最小値を求めよ．

高等学校対応数学 確認テスト	数学Ⅰ・A 上級 ２次関数 第３講①	氏名		得点
		学習日 月　日	所用時間 分	/100

[２次関数のグラフとｘ軸との関係]（1 50 点，2 (1)10 点(2)20 点(3)20 点）

1 曲線 $y=x^2+ax+b$ が x 軸から切りとる線分の長さが 1 であるとき，b のとりうる値の最小値は $\boxed{}$ である．

2 2 次関数 $y=ax^2+2ax+b$ について，次の問いに答えよ．

(1)　頂点の x 座標を求めよ．

(2)　この 2 次関数のグラフが x 軸に接し，値域は $y\leqq 0$ であるような a，b の満たす条件式を求めよ．

(3)　(2)で求めた条件式をグラフにかけ．

上級─２次関数　6

高等学校対応数学 確認テスト	数学Ⅰ・A 上級 ２次関数 第３講②	氏名	得点
		学習日　月　日 / 所用時間　分	/100

[２次方程式とグラフ]（1 50 点，2 50 点）

1　$f(x)=ax^2+bx+c$（ただし，$a>0$）とする．$y=f(x)$ のグラフの頂点の座標が $(1,\ -3)$ であるとき，b, c を a を用いて表せ．また，2 次方程式 $f(x)=0$ の 2 つの解の差を a を用いて表せ．

2　2 つの 2 次方程式 $x^2+kx-2=0$，$x^2+2x-k=0$ が共通の解をもつように，定数 k の値を定めよ．また，そのときの共通な解を求めよ．

高等学校対応数学 確認テスト	数学Ⅰ・A 上級 ２次関数 第４講①	氏名		得点
		学習日　月　日	所用時間　分	/100

[２次不等式とグラフ（１）]（$\boxed{1}$ (1)40 点 (2)60 点）

1　2 次不等式 $ax^2-3ax+2>0$ について，次の各問いに答えよ．ただし，a は実定数とする．

(1)　すべての実数 x に対して，上の不等式が成り立つような a の値の範囲を求めよ．

(2)　$-1<x<1$ を満たすすべての実数 x に対して，上の不等式が成り立つような a の値の範囲を求めよ．

高等学校対応数学 確認テスト	数学Ⅰ・A 上級 ２次関数 第４講②	氏名		得点
		学習日 月　日	所用時間 分	/100

[２次不等式とグラフ（２）]（1 50 点，2 50 点）

1　次の連立不等式が解をもつように定数 a の値の範囲を定めよ．

$$\begin{cases} x^2-10x+24<0 \\ (x-a)(x+2a-1)<0 \end{cases}$$

2　周囲の長さが 30cm で，面積が 36cm^2 以上の長方形を作りたい．この長方形の縦の長さのとりうる値の範囲を求めよ．

■高等学校対応数学 確認テスト	数学Ⅰ・A 上級 ２次関数 第５講①	氏名		得点
		学習日 月　日	所用時間 分	/100

[総合演習（1）]（$\boxed{1}$ (1)(2)各 20 点 $\boxed{2}$ (1)(2)各 10 点(3)(4)各 20 点）

1 m，n を正の整数とする．x についての 2 次方程式 $8x^2-8(m-2)x+n-4=0$ が $0<x<1$ の範囲で異なる 2 つの解をもつとき，

(1)　m，n の値を求めよ．

(2)　2 つの解を求めよ．

2 a，b を自然数とし，2 次関数 $y=x^2+2ax+2a-2b+2$ のグラフを C とする．

(1)　このとき，放物線 C の頂点の座標を求めよ．

(2)　グラフ C が x 軸と交わらないとき，a，b の値を求めよ．

(3)　2 次方程式 $x^2+2ax+2a-2b+2=0$ が 2 つの解をもつとする．その 2 つの解の差が $2\sqrt{6}$ であるとき，a，b の値を求めよ．

(4)　グラフ C を y 軸方向に−2 だけ平行移動し，さらに x 軸に関して対称移動すると，2 次関数 $y=-x^2-6x-2$ のグラフになるとする．このとき a，b の値を求めよ．

高等学校対応数学 確認テスト	数学Ⅰ・A 上級 ２次関数 第５講②	氏名		得点
		学習日　　月　日	所用時間　　分	／100

[総合演習（２）]（1 (1)50 点 (2)50 点）

1 次の問いに答えよ．

(1)　2 次不等式 $x^2-(5a-1)x+6a^2-3a \leqq 0$ を満たす x の範囲を求めよ．

(2)　(1)で求めた x の範囲における 2 次関数 $y=x^2-ax$ の最小値が 0 であるように a の値を定めよ．

上級−２次関数　11

模範解答

第１講①

1　$y=x^2-3x+4$ のグラフを平行移動したものだから x^2 の係数は等しい．

頂点が直線 $y=2x+1$ 上にあるから，

頂点 $(t,\ 2t+1)$ とおけるので

$y=(x-t)^2+2t+1$

これが点 $(2,\ 4)$ を通るから

$4=(2-t)^2+2t+1$

$(t-1)^2=0$　より　$t=1$

よって

$y=(x-1)^2+3$

$=x^2-2x+4$

2　$y=x^2+ax-2$ より

$$y=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}-2$$

$y=-x^2-4x+b$ より

$y=-(x+2)^2+b+4$

頂点が一致するから

$$\begin{cases} -\dfrac{a}{2}=-2 \\ -\dfrac{a^2}{4}-2=b+4 \end{cases}$$

$\therefore\ a=4,\ b=-10$

このとき，頂点は $(-2,\ -6)$

第１講②

1　$y=ax^2+bx+c$ において軸が $x=2$ より

$y=a(x-2)^2$　……①

$(0,\ 3)$ を通る $\therefore\ 3=a\times0+b\times0+c$　……②

x 軸に接する $\therefore\ 0=a\times2^2+b\times2+c$　……③

①，②，③より $a=\dfrac{3}{4}$，$b=-3$，$c=3$

2　$y=-2x^2-ax$　……①

$y=bx^2+6x+c$　……②

①，②を平方完成すると

$$y=-2\left(x+\frac{a}{4}\right)^2+\frac{a^2}{8}$$

$$y=b\left(x+\frac{3}{b}\right)^2-\frac{9}{b}+c$$

①，②の頂点が一致することより

$-\dfrac{a}{4}=-\dfrac{3}{b}$ ……③　$\dfrac{a^2}{8}=-\dfrac{9}{b}+c$ ……④

また，②が $(0,\ 9)$ を通ることにより

$c=9$ ……⑤

③〜⑤より b，c を消去した式を作ると

$$\frac{a^2}{8}=-\frac{3}{4}a+9$$

$a^2+6a-72=0$

$\therefore\ a=6,\ -12$

このとき，③，⑤から

$(a,\ b,\ c)=(6,\ 2,\ 9),\ (-12,\ -1,\ 9)$

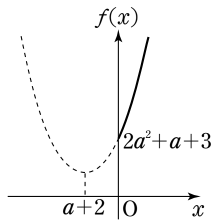
第２講①

1　$f(x)=\{x-(a+2)\}^2+a^2-3a-1$

(i)　軸　$x=a+2$

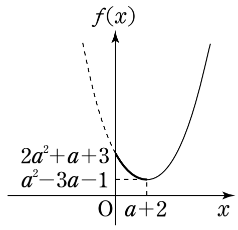
$a+2\leqq0 \rightleftarrows a\leqq-2$ のとき

最小値 $=f(0)=2a^2+a+3$



(ii)　$a+2>0 \rightleftarrows a>-2$ のとき

最小値 $=f(a+2)=a^2-3a-1$



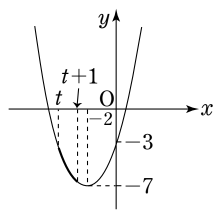
$$\begin{cases} a\leqq-2 \text{ のとき } 2a^2+a+3 \\ a>-2 \text{ のとき } a^2-3a-1 \end{cases}$$

2　$y=(x+2)^2-7=f(x)$ とおく．

(i)　$t+1\leqq-2 \rightleftarrows t\leqq-3$ のとき

$f(t+1)\leqq y\leqq f(t)$ より

$t^2+6t+2\leqq y\leqq t^2+4t-3$

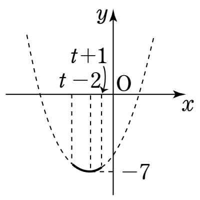


(ii)　$-2\leqq t+1\leqq-\dfrac{3}{2} \rightleftarrows -3\leqq t\leqq-\dfrac{5}{2}$

のとき

$f(-2) \leqq y \leqq f(t)$ より

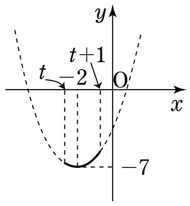
$-7 \leqq y \leqq t^2+4t-3$



(iii)　$-\dfrac{5}{2} \leqq t \leqq -2$ のとき

$f(-2) \leqq y \leqq f(t+1)$ より

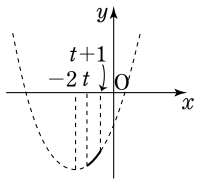
$-7 \leqq y \leqq t^2+6t+2$



(iv)　$-2 \leqq t$ のとき

$f(t) \leqq y \leqq f(t+1)$ より

$t^2+4t-3 \leqq y \leqq t^2+6t+2$



$t \leqq -3$ のとき

$t^2+6t+2 \leqq y \leqq t^2+4t-3$

$-3 \leqq t \leqq -\dfrac{5}{2}$ のとき

$-7 \leqq y \leqq t^2+4t-3$

$-\dfrac{5}{2} \leqq t \leqq -2$ のとき

$-7 \leqq y \leqq t^2+6t+2$

$-2 \leqq t$ のとき

$t^2+4t-3 \leqq y \leqq t^2+6t+2$

第２講②

$\boxed{1}$ 問題の六角形は次図のようである．

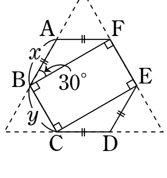
AB $= x$cm，BC $= y$cm とおくと

$4x+2y=60$

$\therefore \quad y=30-2x$

（ただし，$0<x<15$）

このとき，六角形の面積を Scm^2 とすると



$S = 2\triangle\mathrm{ABF} + \square\mathrm{BCEF}$

$= 2 \times \dfrac{1}{2} \cdot \sqrt{3}x \cdot \dfrac{x}{2} + \sqrt{3}x(30-2x)$

$= -\dfrac{3\sqrt{3}}{2}(x-10)^2 + 150\sqrt{3}$

よって，S は $x=10$ のとき最大で，

求める最大値は

$150\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2$

$\boxed{2}$ 正六角形の１辺の長さを $x$cm とすると，正三角形の１辺の長さは

$\dfrac{30-6x}{3} = 10-2x$（cm）

したがって

$S = \dfrac{1}{2}(10-2x)^2 \sin 60° + 6 \cdot \dfrac{1}{2}x^2 \sin 60°$

$= \dfrac{\sqrt{3}}{4}(10x^2-40x+100)$

$= \dfrac{5\sqrt{3}}{2}\{(x-2)^2+6\}$

S が最小のとき，$x=2$ だから

$6x=12$，$30-6x=18$

よって，正三角形に 18cm，正六角形に 12cm となるように切ればよい．

このとき $S = \dfrac{5\sqrt{3}}{2} \cdot 6 = 15\sqrt{3}$（cm^2）

第３講①

$\boxed{1}$ $y=0$ とおくと　$x^2+ax+b=0$

この方程式の解を α，β とおくと

$\alpha+\beta=-a$，$\alpha\beta=b$

x 軸から切り取る線分の長さが１より

$(\alpha-\beta)^2 = (\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta$

$= a^2-4b = 1 \qquad \therefore \quad b = \dfrac{a^2-1}{4}$

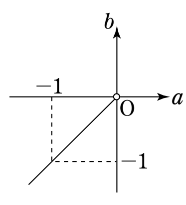
よって，b のとりうる値の最小値は $-\dfrac{1}{4}$

$\boxed{2}$ (1)　$y = ax^2+2ax+b = a(x+1)^2-a+b$

頂点の x 座標は　-1

(2)　$a<0$ かつ $-a+b=0 \rightleftarrows a=b<0$

(3)



▮第３講②

$\boxed{1}$ $\begin{cases} -\dfrac{b}{2a}=1 \\ -\dfrac{b^2-4ac}{4a}=-3 \end{cases}$

$a>0$ を使って

$\begin{cases} b=-2a \\ c=a-3 \end{cases}$

$f(x)=ax^2-2ax+a-3$

$f(x)=0$ の２つの解を α，β とすると

$\begin{cases} \alpha+\beta=2 \\ \alpha\beta=\dfrac{a-3}{a} \end{cases}$

$$|\alpha-\beta|=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}$$
$$=\sqrt{2^2-4\cdot\frac{a-3}{a}}$$
$$=2\sqrt{\frac{3}{a}}$$

$\boxed{2}$ 共通の解を α とすると

$\alpha^2+k\alpha-2=0$ ……①

$\alpha^2+2\alpha-k=0$ ……②

辺々ひいて $(k-2)(\alpha+1)=0$

$\alpha=-1$ または $k=2$

(ⅰ) $\alpha=-1$ のとき　①に代入して $k=-1$

このとき２つの方程式は

$x^2-x-2=0$

$x^2+2x+1=0$

となって，共通解 $x=-1$ をもつ.

(ⅱ) $k=2$ のとき，２つの方程式はいずれも

$x^2+2x-2=0$

となるから，共通解 $x=-1\pm\sqrt{3}$ をもつ

以上(ⅰ)，(ⅱ)より

$k=-1$，共通解 $x=-1$

または

$k=2$，共通解 $x=-1\pm\sqrt{3}$

▮第４講①

$\boxed{1}$ (1)　$f(x)=ax^2-3ax+2>0$ …①

とおく．すべての実数 x に対し，不等式①が成り立つためには，$f(x)=0$ の判別式を D とおくと

$a>0$ かつ $D<0$

が成り立てばよい．$D<0$ から

$D=9a^2-8a<0$

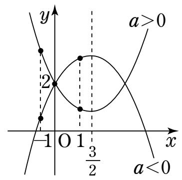
$a(9a-8)<0$　　$\therefore$　$0<a<\dfrac{8}{9}$

これは $a>0$ を満たすから

$0<a<\dfrac{8}{9}$

(2)　$f(x)=a\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{9}{4}a+2$

$-1<x<1$ を満たすすべての実数 x に対し，不等式①が成り立つためには，$y=f(x)$ のグラフから



(ⅰ)　$a>0$ のとき，$f(1)\geqq 0$ となればよいから

$f(1)=-2a+2\geqq 0$　$\therefore$　$a\leqq 1$

$a>0$ と合わせて　$0<a\leqq 1$ ……②

(ⅱ)　$a<0$ のとき，$f(-1)\geqq 0$ となればよいから

$f(-1)=4a+2\geqq 0$　　$\therefore$　$a\geqq -\dfrac{1}{2}$

$a<0$ と合わせて　$-\dfrac{1}{2}\leqq a<0$ ……③

②，③から

$-\dfrac{1}{2}\leqq a<0$，$0<a\leqq 1$

▮第４講②

$\boxed{1}$ $x^2-10x+24<0$ $\rightleftarrows$ $4<x<6$

$a\neq -2a+1 \rightleftarrows a\neq\dfrac{1}{3}$ が必要.

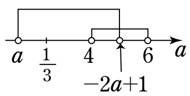
(ⅰ)　$a<-2a+1 \rightleftarrows a<\dfrac{1}{3}$ のとき，

$(x-a)(x+2a-1)<0$ ……①の解は

$a<x<-2a+1$

求める条件は $4<-2a+1$

$\therefore$　$a<-\dfrac{3}{2}$



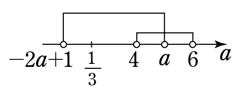
これは $a<\dfrac{1}{3}$ を満たす.

(ⅱ)　$-2a+1<a \rightleftarrows \dfrac{1}{3}<a$ のとき，

①の解は　$-2a+1<x<a$

$-2a+1<\dfrac{1}{3}$ であるから　求める条件は

$4<a$



これは $\dfrac{1}{3}<a$ を満たす.

上級−２次関数　14

以上(i)，(ii) より，求める a の範囲は

$a<-\dfrac{3}{2}$ または $4<a$

$\boxed{2}$ 縦の長さを $x$cm とすると
横の長さは$(15-x)$cm であり，
x のとりうる値の範囲は $0<x<15$ ……①
このとき長方形の面積は $x(15-x)\text{cm}^2$ であるので

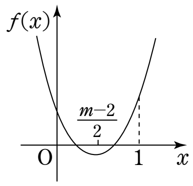
$x(15-x)\geqq 36$
$x^2-15x+36\leqq 0$
$(x-3)(x-12)\leqq 0$
$3\leqq x\leqq 12$

これは①を満たす．以上より求める範囲は
3cm 以上，12cm 以下.

第５講①

$\boxed{1}$ (1) $f(x)=8x^2-8(m-2)x+n-4$ とおくと，

$$f(x)=8\left(x-\frac{m-2}{2}\right)^2-2(m-2)^2+n-4$$



求める条件は

$$\begin{cases} -2(m-2)^2+n-4<0 \\ \qquad \rightleftarrows n<2(m-2)^2+4 \quad \cdots\cdots① \\ f(0)=n-4>0 \rightleftarrows n>4 \quad \cdots\cdots② \\ f(1)=-8m+n+20>0 \\ \qquad \rightleftarrows n>8m>-20 \quad \cdots\cdots③ \\ \text{軸}\quad 0<\dfrac{m-2}{2}<1 \rightleftarrows 2<m<4 \cdots\cdots④ \end{cases}$$

m，n は自然数だから　④より $m=3$
①，②，③に代入して　$4<n<6$
$\therefore n=5$
以上より，$m=3$，$n=5$

(2) 方程式は $8x^2-8x+1=0$
よって 2 つの解は $x=\dfrac{2\pm\sqrt{2}}{4}$

$\boxed{2}$ (1)　$C:y=(x+a)^2-a^2+2a-2b+2$
頂点$(-a,\ -a^2+2a-2b+2)$

(2)　$-a^2+2a-2b+2>0$ より
$(a-1)^2+2b<3$
a，b は自然数だから，$a-1\geqq 0$
$(a-1,\ 2b)=(0,\ 2)$より
$a=1$，$b=1$

(3)　$x^2+2ax+2a-2b+2=0$ の 2 つの解は

$$x=-a\pm\sqrt{a^2-2a+2b-2}$$

$$2\sqrt{a^2-2a+2b-2}=2\sqrt{6}$$

より $a^2-2a+2b-2=6$
$(a-1)^2+2b=9$
$a-1\geqq 0$，$a-1$ は奇数となるから
$(a-1,\ 2b)=(1,\ 8)$
$\therefore\ a=2$，$b=4$

(4)　$y=-x^2-6x-2$ を逆に移動させて，
$C:y=(x^2+6x+2)+2=x^2+6x+4$
よって

$$\begin{cases} 2a=6 \\ 2a-2b+2=4 \end{cases}$$

$\therefore\ a=3$，$b=2$

(別解)
$y=-x^2-6x-2=-(x+3)^2+7$
の頂点$(-3,\ 7)$を逆に移動させて，
C の頂点は$(-3,\ -5)$
よって

$$\begin{cases} -a=-3 \\ -a^2+2a-2b+2=-5 \end{cases}$$

これより $a=3$，$b=2$

第５講②

$\boxed{1}$ (1) $(x-3a)(x-2a+1)\leqq 0$　…… ①
$3a\leqq 2a-1$　$\rightleftarrows$　$a\leqq -1$ のとき，
$3a\leqq x\leqq 2a-1$
$3a\geqq 2a-1$　$\rightleftarrows$　$a\geqq -1$ のとき，
$2a-1\leqq x\leqq 3a$

(2) $g(x)=x^2-(5a-1)x+6a^2-3a$

$$y=f(x)=x^2-ax=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}$$

とおく

(i)　$x=\dfrac{a}{2}$が①を満たすとき，

$$g\left(\frac{a}{2}\right)=-\frac{5}{2}a\left(-\frac{3}{2}a+1\right)\leqq 0$$

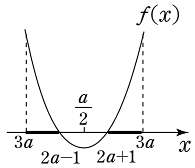
すなわち，$0\leqq a\leqq\dfrac{2}{3}$ のとき，

最小値 $-\dfrac{a^2}{4}=0$

より　$a=0$

上級−２次関数　15

(ii)　$x=\dfrac{a}{2}$ が①を満たさないとき，



$g\left(\dfrac{a}{2}\right)>0$ より

$a<0$ または $\dfrac{2}{3}<a$ ……②

このとき $f(3a)=6a^2>0$ であるから
最小値は区間の端でとることにより
　　$f(2a-1)=(2a-1)(a-1)=0$
②より　　$a=1$
このとき　①より　　$1\leqq x\leqq 3$
　　$f(x)=x(x-1)$
たしかに最小値は $f(1)=0$
以上(i)(ii)より　　$a=0,\ 1$